2025 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）
暨 2025 年全国高中数学联合竞赛
加试（A 卷）参考答案及评分标准

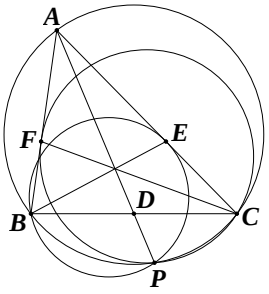
说明：

1．评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分．

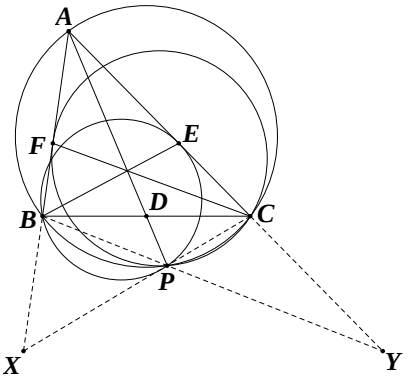
2．如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不得增加其他中间档次．

一．（本题满分 40 分）如图，在△ABC中，D为边BC的中点，延长AD交△ABC的外接圆于点P，过点B, P作一个圆与边AC相切于点E，过点C, P作一个圆与边AB相切于点F．证明：AD, BE, CF三线共点．

（答题时请将图画在答卷纸上）



证法 1：如图，延长CP, AB交于点X，延长BP, AC交于点Y．



由圆幂定理知$XF^2 = XP\cdot XC = XA\cdot XB$，结合比例性质得

$$\frac{AF}{FB}=\frac{XA-XF}{XF-XB}=\frac{XA-\sqrt{XA\cdot XB}}{\sqrt{XA\cdot XB}-XB}=\sqrt{\frac{XA}{XB}}. \qquad ①$$

同理有

$$\frac{AE}{EC}=\sqrt{\frac{YA}{YC}}. \qquad ②$$

……20 分

对△ABC及点P用塞瓦定理，得

$$\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CY}{YA}=1,$$

又 D 为边 BC 的中点，所以 $\frac{AX}{XB}\cdot\frac{CY}{YA}=1$，结合①、②得

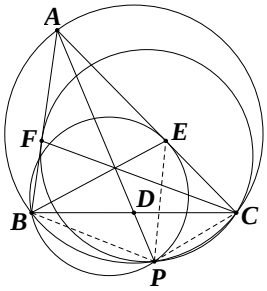
$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\sqrt{\frac{XA}{XB}}\cdot 1\cdot\sqrt{\frac{YC}{YA}}=\sqrt{\frac{AX}{XB}\cdot\frac{CY}{YA}}=1,$$

故由塞瓦定理的逆定理知 AD, BE, CF 三线共点． ……40 分

证法 2：连接 PB, PE, PC．由于过 B, P, E 的圆与 AC 相切于点 E，并且 A, B, P, C 四点共圆，故

$$\angle CBE=\angle AEB-\angle ACB=\angle EPB-\angle APB=\angle EPA,$$

结合 $\angle CBA=\angle CPA$，又有 $\angle EBA=\angle CPE$． ……10 分



记 $\angle CBE=\angle EPA=\alpha$，$\angle EBA=\angle CPE=\beta$，则

$$\frac{AE}{EC}=\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle CBE}}=\frac{AB\cdot\sin\beta}{BC\cdot\sin\alpha},\qquad ①$$

$$\frac{AE}{EC}=\frac{S_{\triangle APE}}{S_{\triangle CPE}}=\frac{AP\cdot\sin\alpha}{PC\cdot\sin\beta}.\qquad ②$$

由①、②知 $\frac{AE}{EC}=\sqrt{\frac{AB\cdot AP}{BC\cdot PC}}$．同理有 $\frac{AF}{FB}=\sqrt{\frac{AC\cdot AP}{BC\cdot PB}}$． ……20 分

为证明 AD, BE, CF 共点，由塞瓦定理的逆定理，仅需证明

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1,$$

而 $BD=DC$，故等价于证明 $\frac{AE}{EC}=\frac{AF}{FB}$，即 $\sqrt{\frac{AB\cdot AP}{BC\cdot PC}}=\sqrt{\frac{AC\cdot AP}{BC\cdot PB}}$，亦即

$$AB\cdot PB=AC\cdot PC.$$

注意 $\angle ABP$ 与 $\angle ACP$ 互补，故

$$\frac{AB\cdot PB}{AC\cdot PC}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot PB\cdot\sin\angle ABP}{\frac{1}{2}AC\cdot PC\cdot\sin\angle ACP}=\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACP}}=\frac{BD}{DC}=1,$$

从而结论得证． ……40 分

二．（本题满分 40 分）设 m, n, k 都是正整数，$m \ge 2$，且 $n \ge k \ge 2$，实数 $x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge 0$，满足以下两个条件：

(i) $x_1^m + x_2^m + \cdots + x_n^m \ge 1$；

(ii) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \le k$.

证明：$x_1 + x_2 + \cdots + x_k \ge 1$.

证法 1：反证法，假设 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k < 1$，此时有

$$1 > x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_k \ge \cdots \ge x_n \ge 0.$$

设 $x_k = u$，则 $u \le \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k} < \dfrac{1}{k}$，又 $m \ge 2$，故

$$\sum_{i=k+1}^{n} x_i^m \le \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2 \le \sum_{i=k+1}^{n} x_k x_i = u \sum_{i=k+1}^{n} x_i,$$

结合(i)、(ii)可知

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^m \ge 1 - \sum_{i=k+1}^{n} x_i^m \ge 1 - u \sum_{i=k+1}^{n} x_i \ge 1 - u\left(k - \sum_{i=1}^{k} x_i\right). \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 20 \text{ 分}$$

利用 $x_i^m \le x_i^2$ 及 $x_i - u \ge 0\ (1 \le i \le k)$，得

$$\begin{aligned} 1 - uk &\le \sum_{i=1}^{k} x_i^m - u\sum_{i=1}^{k} x_i \le \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - u\sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{k} x_i(x_i - u) \\ &\le \sum_{i=1}^{k} (x_i - u) = \sum_{i=1}^{k} x_i - uk, \end{aligned}$$

这与 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k < 1$ 的假设矛盾.

因此原命题成立. $\cdots\cdots\cdots\cdots 40$ 分

证法 2：若 $x_1 \ge 1$，则结论显然成立.

以下设 $1 > x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge 0$．由 $m \ge 2$ 知 $x_i^2 \ge x_i^m\ (1 \le i \le n)$，结合(i)可得

(i') $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \ge 1$.

反证法，假设 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = t < 1$.

记 $u = x_k$，则 $0 \le u \le \dfrac{t}{k}$．将 $x_2, \cdots, x_k$ 都减少到 u，x_1 增加到 $t - (k-1)u$，即设 $x_1' = t - (k-1)u$，$x_2' = \cdots = x_k' = u$，那么

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \le \sum_{i=1}^{k} x_i'^2 = (t - (k-1)u)^2 + (k-1)u^2. \qquad ①$$

（这里用到函数 x^2 的下凸性：对 $a \le b$，$\varepsilon > 0$，有 $a^2 + b^2 \le (a - \varepsilon)^2 + (b + \varepsilon)^2$.）

$\cdots\cdots\cdots\cdots 10$ 分

又 $x_i \le u\ (k+1 \le i \le n)$，故结合(ii)可知

$$\sum_{i=k+1}^{n} x_i^2 \le \sum_{i=k+1}^{n} u x_i \le u(k - t). \qquad ②$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots 20$ 分

将①、②相加，得

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le (t - (k-1)u)^2 + (k-1)u^2 + u(k-t) = k(k-1)u^2 + (k + t - 2kt)u + t^2.$$

将右边记为 $f(u)$，由 $k(k-1)\geq 0$ 知 $f(u)$ 是 u 的下凸函数，从而

$$f(u)\leq \max\left\{f(0),\ f\left(\frac{t}{k}\right)\right\}.$$

由于 $f(0)=t^2<1$，$f\left(\frac{t}{k}\right)=\frac{k-1}{k}t^2+\frac{k+t-2kt}{k}t+t^2=t<1$，故 $f(u)<1$，这与(i')矛盾．故假设不成立，原命题成立．　　……40 分

三．（本题满分 50 分）求具有下述性质的所有正整数 n：存在 n 的一个倍数 N，其在十进制表示下不含数码 0，但含有 $1,2,\cdots,9$ 中每一个数码，并且对任意 $i\in\{1,2,\cdots,9\}$，可以删去 N 的十进制表示中的一个数码 i，使所得的数仍是 n 的倍数．

解：所求 n 为满足：$3\nmid n$，且 $10\nmid n$ 的所有正整数 n．

必要性：若 $10\mid n$，则 n 的任何倍数的个位数为 0，但 N 不能有数码 0，从而结论不成立．若 $3\mid n$，则 $3\mid N$，可知 N 的数码和被 3 整除，但是 N 删去一个 1 后，数码和不被 3 整除，从而不可能是 n 的倍数． ……10 分

充分性：首先证明一个引理．

引理：设 d 是正整数，且 d 与 10 互素，则存在正整数 k，使得不含数码 0 的所有 k 位数中含有模 d 的完全剩余系．

引理的证明：设不含数码 0 的所有 l 位数模 d 的全部余数为 $r_1,r_2,\cdots,r_s$，且 $s<d$，则 $l+1$ 位数中，首位为 1 可以得到 s 个不同余数 $10^l+r_i\ (1\le i\le s)$，首位为 2 也可以得到 s 个不同余数 $2\times10^l+r_i\ (1\le i\le s)$，这两组余数不能完全相同，否则

$$\sum_{i=1}^{s}(10^l+r_i)\equiv\sum_{i=1}^{s}(2\times10^l+r_i)\ (\mathrm{mod}\,d),$$

得 $d\mid 10^l s$．但 d 与 10 互素，且 $0<s<d$，这不成立．故不含数码 0 的 $l+1$ 位数中模 d 的不同余数个数严格增加了．从而对充分大的整数 k，不含数码 0 的所有 k 位数中含有模 d 的完全剩余系．引理得证． ……30 分

回到原问题．由于 $10\nmid n$，可设 $n=p^\alpha d$，这里 $p\in\{2,5\}$，$\alpha\in\mathbf{N}$，d 与 10 互素．

对正整数 L,M，记 $\overline{L*M}$ 是将 L 和 M 在十进制下拼接而成的正整数（即将 M 的十进制表示写在 L 之后），类似也可以定义多个正整数的拼接．

由引理，存在 $k>\alpha$，使得不含 0 的所有 k 位数中含有模 d 的完全剩余系．构造 N 为如下形式：

$$N=\overline{A_1*1*A_2*2*A_3*3*\cdots*A_9*9*B},$$

其中 $A_1,A_2,\cdots,A_9$ 是 k 位正整数，B 是 $k+\alpha$ 位正整数，均不含数码 0．对 $1\le i\le 9$，将 N 删去上面表达式中的 i 后所得数记为 N_i，则

$$N-N_i=(9\times\overline{A_1*1*\cdots*A_{i-1}*(i-1)*A_i}+i)\times10^{l_i},$$

其中 $l_i=(9-i)(k+1)+k+\alpha$．

我们要求 $d\mid N-N_i\ (1\le i\le 9)$．

取 A_1 满足 $9A_1+1\equiv0\ (\mathrm{mod}\,d)$，这由 $3\nmid d$ 及引理知可行．从而 $d\mid N-N_1$．

假设已经取了 $A_1,\cdots,A_i\ (i<9)$，使得 $d\mid N-N_j\ (1\le j\le i)$，由引理知可取 A_{i+1} 满足

$$9\times(\overline{A_1*1*\cdots*A_i*i}\times10^k+A_{i+1})+(i+1)\equiv0\ (\mathrm{mod}\,d),$$

从而 $d\mid N-N_{i+1}$．这样取定了 $A_1,A_2,\cdots,A_9$．

设 B 的前 k 位为 B_1，后 α 位为 B_2（$\alpha=0$ 时没有 B_2），$B=\overline{B_1*B_2}$．

断言：对 $p\in\{2,5\}$，存在一个不含数码 0 的 α 位数 B_2 被 p^α 整除．

断言的证明放在最后．取出断言中的 B_2，则

$$N=10^\alpha\times\overline{A_1*1*A_2*2*A_3*3*\cdots*A_9*9*B_1*B_2}\equiv0\ (\mathrm{mod}\,p^\alpha),$$

又可以取 B_1 使得 $N \equiv 0 \pmod{d}$（由引理，$10^{\alpha} B_1$ 可取到模 d 的完系），此时 $n \mid N$. 又 $d \mid N - N_i$，而 $l_i \geq \alpha$，故 $p^{\alpha} \mid N - N_i$，从而 $n \mid N - N_i$，这样 $n \mid N_i \ (1 \leq i \leq 9)$，所构造的 N 满足要求.

断言的证明：对 α 归纳. $\alpha = 1$ 时结论显然. 假设 $\alpha = t$ 时，存在一个 t 位不含 0 的正整数 M，使得 $p^t \mid M$，则 $t+1$ 时，考虑

$$\overline{a*M} = 10^t a + M = p^t \left(\left(\frac{10}{p} \right)^t a + \frac{M}{p^t} \right),$$

由于 $\frac{10}{p}$ 与 p 互素，可取 $a \in \{1, 2, \cdots, p\}$，使得 $\left(\frac{10}{p} \right)^t a + \frac{M}{p^t} \equiv 0 \pmod{p}$，这样 $p^{t+1} \mid \overline{a*M}$.

……50 分

四．（本题满分 50 分）给定整数$t>10000$．甲乙两人玩如下的游戏，猜一个满足$\tau(N)\le t^2+t+100$的正整数N，这里$\tau(N)$是N的正约数个数. 规则如下：

先由甲确定一个正整数k，并告知乙．然后乙想一个满足要求的N，并且：

(i) 告诉甲$\tau(N)$的值；

(ii) 给出N的k个不同的正约数（若$\tau(N)\le k$，则乙只需给出N的所有正约数；若$\tau(N)>k$，则乙可以选择性地给出N的k个正约数）.

求最小的k，使得甲一定能猜出N．

解：所求$k_{\min}=t^2+1$．为书写简单，下面的约数均指正约数.

首先若$k\le t^2$，则甲未必能确定N．例如乙告诉甲$\tau(N)=t(t+1)$，以及如下t^2个N的约数：2^i3^j $(i,j=0,1,\cdots,t-1)$，则$N=2^{t-1}3^t$或$N=2^t3^{t-1}$都可以．

……10 分

下面证明$k=t^2+1$时，甲一定可以确定N．记$m=t^2+1$，若$\tau(N)\le m$，则乙写出了N的所有约数，其中最大的数即为N．下面假设$\tau(N)>m$，乙写了N的m个约数$d_1,d_2,\cdots,d_m$．

对正整数L和素数p，记$v_p(L)$为L的标准分解中素因子p的幂次．对每个素数p，甲可以算出$\alpha_p=\max\limits_{1\le i\le m}v_p(d_i)$，则$p^{\alpha_p}\mid N$，故$v_p(N)\ge\alpha_p$.

断言：若$\alpha_p\le t-2$，则$v_p(N)=\alpha_p$．特别地，若$\alpha_p=0$，则$p\nmid N$.

断言的证明：假设$v_p(N)\ge\alpha_p+1$. 由$\tau(N)$的计算公式易知$\dfrac{m}{\tau(N)}\le\dfrac{\alpha_p+1}{v_p(N)+1}$.

若$v_p(N)\ge\alpha_p+2$，则

$$m\le\frac{\alpha_p+1}{v_p(N)+1}\tau(N)\le\frac{\alpha_p+1}{\alpha_p+3}\tau(N)\le\frac{t-1}{t+1}(t^2+t+100)<t^2+1,$$

这不成立．故$v_p(N)=\alpha_p+1$．

……20 分

若$\alpha_p\le t-100$，则

$$m\le\frac{\alpha_p+1}{\alpha_p+2}\tau(N)\le\frac{t-99}{t-98}(t^2+t+100)<t^2+1,$$

不成立．故$t-99\le\alpha_p\le t-2$.

……30 分

设$v_p(N)+1=\alpha_p+2=t-u$，其中$0\le u\le 97$.

由$v_p(N)+1\mid\tau(N)$，即$t-u\mid\tau(N)$，可知

$$\tau(N)=t^2+t-u^2-u.$$

这是因为$t^2+t-u^2-u\equiv 0\pmod{t-u}$，且$t^2<t^2+t-u^2-u<t^2+t+100$，而

$$t^2+t-u^2-u-(t-u)<t^2,\quad t^2+t-u^2-u+(t-u)>t^2+t+100,$$

故在$(t^2,t^2+t+100]$中被$t-u$整除的数只有t^2+t-u^2-u．于是

$$m\le\frac{\alpha_p+1}{\alpha_p+2}\tau(N)=\frac{t-u-1}{t-u}(t^2+t-u^2-u)=(t-u-1)(t+u+1)<t^2+1,$$

也不成立．断言获证．

……40 分

由断言知，可以识别出N的所有素因子，且对于满足$\alpha_p\le t-2$的素数p，

有$v_p(N)=\alpha_p$．若$\alpha_p\geq t-1$，称这样的素数p为“特殊的”.

特殊的素数至多两个，否则$\tau(N)\geq t^3>t^2+t+100$，矛盾.

若没有特殊的素数，则N已经确定．若恰有一个特殊的素数p，则除p外的其余素因子的幂次均已确定，由$\tau(N)$的值也唯一确定p的幂次，N也确定.

下面只需讨论恰有两个特殊素数p,q的情况，此时

$$v_p(N)\geq\alpha_p\geq t-1，\ v_q(N)\geq\alpha_q\geq t-1.$$

N没有其他素因子，否则$\tau(N)\geq 2t^2>t^2+t+100$，矛盾．由于所有$m=t^2+1$个约数均为$p^aq^b$的形式，故必有$\max\{\alpha_p,\alpha_q\}\geq t$．不妨设$\alpha_p\geq t$.

若$v_p(N)\geq t+1$或$v_q(N)\geq t$，则由$\tau(N)=(v_p(N)+1)(v_q(N)+1)$知

$$\tau(N)\geq\min\{(t+2)t,\ (t+1)(t+1)\}=t^2+2t>t^2+t+100，$$

不成立．故只能$v_p(N)=t$，$v_q(N)=t-1$，$N=p^tq^{t-1}$.

综上，当$k=t^2+1$时，甲总能确定N.　　……50 分