2025年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）

暨2025全国高中数学联合竞赛

一试试题（A卷）

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 若 $\log_3(9x),\log_9(27x),\log_{27}(3x)$ 成等差数列，则正数 x 的值为_____.

2. 设集合 $A=\{1,2,3,\cdots,100\},B=\left\{a^2+2^a\mid a\in A\right\}$，则 $A\cup B$ 的元素个数为_____.

3. 设点 P 在椭圆 $\Gamma_1:\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{25}=1$ 上，F_1,F_2 为 Γ_1 的两个焦点，线段 F_1P 交椭圆 $\Gamma_2:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{14}=1$ 于点 Q．若 ΔF_2PQ 的周长为 8，则线段 F_1Q 的长度为_____.

4. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R},g(x)=(x-1)f(x),h(x)=f(x)+x$．若 $g(x)$ 为奇函数，$h(x)$ 为偶函数，则 $f(x)$ 的最大值为_____.

5. 若正整数 k 满足 $\left(\dfrac{\sin20^\circ}{\cos25^\circ}+\dfrac{\sin25^\circ}{\cos20^\circ}\cdot\mathrm{i}\right)^k\in\mathbf{R}$（$i$ 为虚数单位），则 k 的最小值为_____.

6. 设 Γ 为任意四棱柱，在 Γ 的 12 条棱中随机选取两条不同的棱 l_1,l_2，将事件“l_1 所在直线与 l_2 所在直线平行”发生的概率记为 $P(\Gamma)$，则 $P(\Gamma)$ 所有可能值为_____.

7. 平面中的 3 个单位向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left[\vec{a}\cdot\vec{c}\right]+\left[\vec{b}\cdot\vec{c}\right]$（其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数），则 $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$ 的取值范围是_____.

8. 将 $1,2,3,\cdots,9$ 排列为 a,b,c,d,e,f,g,h,i，使得 3 个三位数 $\overline{abc},\overline{def},\overline{ghi}$ 之和等于 2025，则不同的排列方法数为_____.

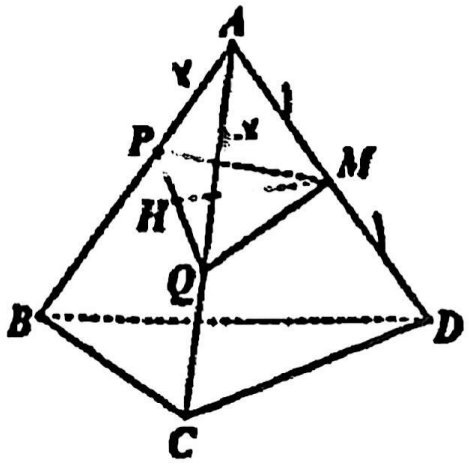
二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过屋或演算步骤．

9．（本题满分 16 分）在平面直角坐标系 xOy 中，点集

$$\Gamma=\left\{(x,y)\middle|y^2=2x+2|x|\right\}$$

若 Γ 中的 3 个不同的点 M,P,Q 满足：M 为 PQ 的中点，且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-2$，求点 M 的坐标。

10．（本题满分 20 分）设正四面体 $ABCD$ 各棱长均为 2，P,Q 分别是棱 AB,AC 上的动点（允许位于棱的端点），$AP+AQ=2$，M 为棱 AD 的中点．在 $\triangle MPQ$ 中，MH 为 PQ 边上的高．求 MH 长度的最小值．



11．（本题满分 20 分）设 α 为实数，m,n 为正整数，且 $\sin m\alpha\cdot\sin n\alpha\neq 0$

证明：$\dfrac{1}{|\sin m\alpha|}+\dfrac{1}{|\sin n\alpha|}>\dfrac{1}{m\cdot|\sin m\alpha\cdot\sin n\alpha|+|\sin mn\alpha|}$