2025 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）
暨 2025 年全国高中数学联合竞赛
一试（A 卷）参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不得增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，不得增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 若 $\log_3(9x), \log_9(27x), \log_{27}(3x)$ 成等差数列，则正数 x 的值为_____.

答案： 9.

解： 设 $\log_3 x = t$，则 $2+t, \dfrac{3+t}{2}, \dfrac{1+t}{3}$ 成等差数列，即 $2+t+\dfrac{1+t}{3}=2\cdot\dfrac{3+t}{2}$，解得 $t=2$，故 $x=3^t=9$.

2. 设集合 $A=\{1,2,3,\cdots,100\}$，$B=\{a^2+2^a \mid a\in A\}$，则 $A\cup B$ 的元素个数为_____.

答案： 194.

解： 当 $a\in[0,\infty)$ 时，a^2+2^a 关于 a 严格递增，故 $|B|=|A|=100$（$|X|$ 表示有限集 X 的元素个数）. 又 $1^2+2^1=3>1$，$6^2+2^6=100$，故 $|A\cap B|=6$.

所以 $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=100+100-6=194$.

3. 设点 P 在椭圆 $\Gamma_1:\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{25}=1$ 上，F_1, F_2 为 Γ_1 的两个焦点，线段 F_1P 交椭圆 $\Gamma_2:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{14}=1$ 于点 Q. 若 ΔF_2PQ 的周长为 8，则线段 F_1Q 的长度为_____.

答案： $\sqrt{14}+1$.

解： 由于 $\sqrt{25-20}=\sqrt{14-9}$，故 F_1, F_2 是 Γ_1 与 Γ_2 的公共焦点.

由椭圆的定义知 $|PF_1|+|PF_2|=10, |QF_1|+|QF_2|=2\sqrt{14}$，即

$$|PQ|+|PF_2|=10-|QF_1|, |QF_2|=2\sqrt{14}-|QF_1|.$$

所以 $10+2\sqrt{14}-2|QF_1|=|PQ|+|PF_2|+|QF_2|=8$，即线段 F_1Q 的长为 $\sqrt{14}+1$.

4. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$g(x)=(x-1)f(x)$，$h(x)=f(x)+x$. 若 $g(x)$ 为奇函数，$h(x)$ 为偶函数，则 $f(x)$ 的最大值为_____.

答案： $\dfrac{1}{4}$.

解： 对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $\begin{cases} g(-x)=-g(x), \\ h(-x)=h(x), \end{cases}$ 即 $\begin{cases} (-x-1)f(-x)=-(x-1)f(x), \\ f(-x)-x=f(x)+x. \end{cases}$

所以 $(x-1)f(x)=(x+1)f(-x)=(x+1)(f(x)+2x)$.

因此 $f(x)=-x(x+1)=\frac{1}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$. 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时， $f(x)$ 取到最大值 $\frac{1}{4}$.

5. 若正整数 k 满足 $\left(\frac{\sin 20^\circ}{\cos 25^\circ}+\frac{\sin 25^\circ}{\cos 20^\circ}\cdot \mathrm{i}\right)^k\in\mathbf{R}$（i 为虚数单位），则 k 的最小值为_____.

答案： 18.

解： 由于

$$\frac{\sin 20^\circ}{\cos 25^\circ}+\frac{\sin 25^\circ}{\cos 20^\circ}\cdot \mathrm{i}=\frac{\sin 20^\circ\cos 20^\circ+\sin 25^\circ\cos 25^\circ\cdot \mathrm{i}}{\cos 20^\circ\cos 25^\circ}=\frac{\sin 40^\circ+\sin 50^\circ\cdot \mathrm{i}}{2\cos 20^\circ\cos 25^\circ}$$

$$=\frac{1}{2\cos 20^\circ\cos 25^\circ}\cdot(\cos 50^\circ+\sin 50^\circ\cdot \mathrm{i}),$$

故

$$\left(\frac{\sin 20^\circ}{\cos 25^\circ}+\frac{\sin 25^\circ}{\cos 20^\circ}\cdot \mathrm{i}\right)^k=\frac{1}{(2\cos 20^\circ\cos 25^\circ)^k}\cdot(\cos 50k^\circ+\sin 50k^\circ\cdot \mathrm{i}),$$

上式为实数当且仅当 $\sin 50k^\circ=0$，即 $18\mid 5k$，故所求 k 的最小值为 18.

6. 设 Γ 为任意四棱柱，在 Γ 的 12 条棱中随机选取两条不同的棱 l_1, l_2，将事件“l_1 所在直线与 l_2 所在直线平行”发生的概率记为 $P(\Gamma)$，则 $P(\Gamma)$ 的所有可能值为_____.

答案： $\frac{5}{33}, \frac{7}{33}, \frac{3}{11}$.

解： 记 Γ 为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，则 $AB\parallel A_1B_1$, $BC\parallel B_1C_1$, $CD\parallel C_1D_1$, $DA\parallel D_1A_1$，且 $AA_1\parallel BB_1\parallel CC_1\parallel DD_1$，并且底面上的棱与侧棱不平行.

考虑底面 $ABCD$ 的形状. 当两组对边都不平行时，$P(\Gamma)=\frac{\mathrm{C}_2^2\times 4+\mathrm{C}_4^2}{\mathrm{C}_{12}^2}=\frac{5}{33}$；当 $ABCD$ 为梯形时，$P(\Gamma)=\frac{\mathrm{C}_2^2\times 2+\mathrm{C}_4^2+\mathrm{C}_4^2}{\mathrm{C}_{12}^2}=\frac{7}{33}$；当 $ABCD$ 为平行四边形时，$P(\Gamma)=\frac{\mathrm{C}_4^2+\mathrm{C}_4^2+\mathrm{C}_4^2}{\mathrm{C}_{12}^2}=\frac{3}{11}$. 因此 $P(\Gamma)$ 的所有可能值为 $\frac{5}{33}, \frac{7}{33}, \frac{3}{11}$.

7. 平面中的 3 个单位向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足 $\vec{a}\cdot\vec{b}=[\vec{a}\cdot\vec{c}]+[\vec{b}\cdot\vec{c}]$（其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数），则 $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$ 的取值范围是_____.

答案： $\{1\}\cup(\sqrt{5}, \sqrt{2}+1]$.

解： 由 $\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|=1$ 及 $\vec{a}\cdot\vec{b}=[\vec{a}\cdot\vec{c}]+[\vec{b}\cdot\vec{c}]\in\mathbf{Z}$，可知 $\vec{a}\cdot\vec{b}\in\{-1, 0, 1\}$.

若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，则 $\vec{a}=\vec{b}$，此时 $[\vec{a}\cdot\vec{c}]+[\vec{b}\cdot\vec{c}]=2[\vec{a}\cdot\vec{c}]$ 为偶数，不可能为 1，矛盾.

若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，则 $\vec{b}=-\vec{a}$，此时 $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\left|\vec{c}\right|=1$（相应的例子存在，例如 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}$ 的夹角为锐角时，由 $-1<-\vec{b}\cdot\vec{c}<0<\vec{a}\cdot\vec{c}<1$ 知 $[\vec{a}\cdot\vec{c}]+[\vec{b}\cdot\vec{c}]=-1=\vec{a}\cdot\vec{b}$）.

若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，不妨设 $\vec{a}=(1, 0)$, $\vec{b}=(0, 1)$, $\vec{c}=(\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta\in[0, 2\pi)$.

记 $f(\theta)=[\vec{a}\cdot\vec{c}]+[\vec{b}\cdot\vec{c}]=[\cos\theta]+[\sin\theta]$.

当$\theta=0$或$\frac{\pi}{2}$时，$f(\theta)=1\neq 0$，当$\theta\in\left(\frac{\pi}{2},2\pi\right)$时，$f(\theta)<0$，均不合要求.

当$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$f(\theta)=0$，满足要求，此时

$$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(1+\sin\theta)^2}=\sqrt{3+2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\in(\sqrt{5},\sqrt{2}+1].$$

综上，$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$的取值范围是$\{1\}\cup(\sqrt{5},\sqrt{2}+1]$.

8. 将$1,2,3,\cdots,9$排列为a,b,c,d,e,f,g,h,i，使得3个三位数$\overline{abc},\overline{def},\overline{ghi}$之和等于2025，则不同的排列方法数为_____.

答案：1944.

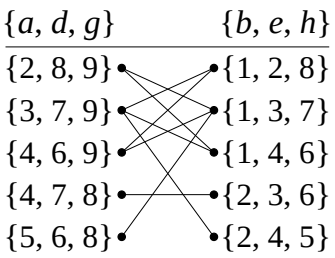
解：记$A=a+d+g,\ B=b+e+h,\ C=c+f+i$.

由条件知$A+B+C=1+2+3+\cdots+9=45$，且$100A+10B+C=2025$.

注意到C为5的倍数，且$1+2+3\leq C\leq 9+8+7$，故$C=15$.

从而$A+B=30$，且$100A+10B=2010$. 解得$A=19,\ B=11$.

满足$A=19,\ B=11$且$\{a,d,g\}$与$\{b,e,h\}$是$\{1,2,3,\cdots,9\}$的两个不交的集合的情形，恰有如下连线所表示的9种，每种情形均使集合$\{c,f,i\}$随之确定，再考虑到a,d,g的次序，b,e,h的次序，c,f,i的次序分别有$3!=6$种选择，故所求排列方法数为$9\times 6^3=1944$.



二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9. **（本题满分 16 分）**在平面直角坐标系xOy中，点集

$$\Gamma=\left\{(x,y)\,\middle|\,y^2=2x+2|x|\right\}.$$

若Γ中的3个不同的点M,P,Q满足：M为PQ的中点，且$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-2$，求点$M$的坐标.

解：根据条件，Γ是x轴负半轴与抛物线$\Omega:y^2=4x$的并集. ……4 分

假如P,Q均在x轴负半轴上，则$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}>0$，与$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-2$矛盾.

假如P,Q均在Ω上，则PQ的中点M不可能在Ω上，且M也不可能在x轴负半轴上，与$M\in\Gamma$矛盾.

因此，可不妨设P在x轴负半轴上，Q在抛物线Ω上，易知此时M在Ω上.

设$P(a,0),Q(b^2,2b),M(m^2,2m)$，其中$a<0$，$b,m\in\mathbf{R}$.

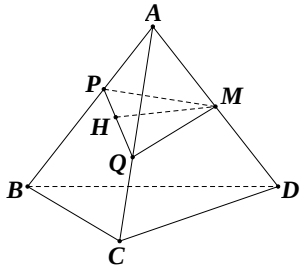
由M为PQ的中点知$\begin{cases}a+b^2=2m^2,\\2b=4m,\end{cases}$故$\begin{cases}a=-2m^2,\\b=2m.\end{cases}$

所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=a\cdot b^2+0=-8m^4$. ……12 分

由 $-8m^4=-2$ 得 $m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故点 M 的坐标为 $\left(\dfrac{1}{2},\sqrt{2}\right)$ 或 $\left(\dfrac{1}{2},-\sqrt{2}\right)$.

……16 分

10.（本题满分 20 分）设正四面体 $ABCD$ 各棱长均为 2，P, Q 分别是棱 AB, AC 上的动点（允许位于棱的端点），$AP+AQ=2$，M 为棱 AD 的中点．在 $\triangle MPQ$ 中，MH 为 PQ 边上的高．求 MH 长度的最小值．



解法 1：设 $AP=1-t,\ AQ=1+t\ (-1\le t\le 1)$.

由 $\angle BAD=\angle CAD=\angle BAC=60^\circ$ 及 $AM=1$，可知

$$MP=\sqrt{1+(1-t)^2-(1-t)}=\sqrt{1-t+t^2},$$

$$MQ=\sqrt{1+(1+t)^2-(1+t)}=\sqrt{1+t+t^2},$$

$$PQ=\sqrt{(1-t)^2+(1+t)^2-(1-t)(1+t)}=\sqrt{1+3t^2}.$$

因此 $\cos\angle PMQ=\dfrac{MP^2+MQ^2-PQ^2}{2MP\cdot MQ}=\dfrac{1-t^2}{2MP\cdot MQ}$，进而

$$2S_{\triangle MPQ}=MP\cdot MQ\cdot\sin\angle PMQ=\sqrt{MP^2\cdot MQ^2-(MP\cdot MQ\cdot\cos\angle PMQ)^2}$$

$$=\sqrt{(1-t+t^2)(1+t+t^2)-\left(\frac{1-t^2}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}(1+t^2)}{2}.$$

所以 $MH=\dfrac{2S_{\triangle MPQ}}{PQ}=\dfrac{\sqrt{3}(1+t^2)}{2\sqrt{1+3t^2}}$. ……10 分

由基本不等式得

$$MH=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\sqrt{1+3t^2}+\frac{2}{\sqrt{1+3t^2}}\right)\ge\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot 2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

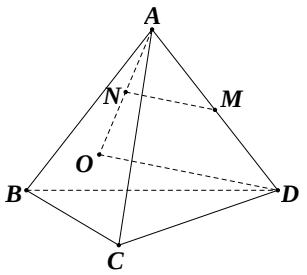
当 $\sqrt{1+3t^2}=\sqrt{2}$，即 $t=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，MH 取到最小值 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ……20 分

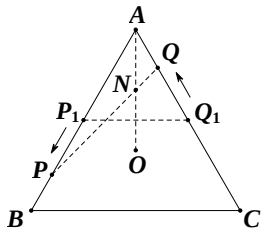
解法 2：取点 M 在平面 ABC 上的射影 N，则有 $MH\ge MN$. ……5 分

取点 D 在平面 ABC 上的射影 O．由正四面体的性质知 O 为正三角形 ABC 的中心，又由 M 为 AD 的中点知 N 为 AO 的中点．从而

$$MH\ge MN=\frac{1}{2}DO=\frac{1}{2}\sqrt{AD^2-AO^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2^2-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

……10 分





下面证明存在 P, Q 的适当位置，使得点 N, H 重合.

让动点 P 从 AB 的中点 P_1 出发沿 AB 边向点 B 运动，点 Q 从 AC 的中点 Q_1 出发沿 CA 边向 A 运动，始终保持 $AP+AQ=2$. 记 PQ 与 AO 的交点为 T，则最初 T 为线段 P_1Q_1 与 AO 的交点，在线段 NO 上，最终 T 重合于 A，故在运动过程中存在一个时刻，T 与 N 重合，对该时刻的 P, Q，由 $MN\perp$ 平面 ABC 知 $MN\perp PQ$ 于点 N，即 N, H 重合. 此时 MH 取到最小值 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ……20 分

11.（本题满分 20 分）设 α 为实数，m, n 为正整数，且 $\sin m\alpha\cdot\sin n\alpha\neq 0$.

证明：$\dfrac{1}{|\sin m\alpha|}+\dfrac{1}{|\sin n\alpha|}>\dfrac{1}{m\cdot|\sin m\alpha\cdot\sin n\alpha|+|\sin mn\alpha|}$.

证明：不等式两边乘以 $m\cdot|\sin m\alpha\cdot\sin n\alpha|+|\sin mn\alpha|$，化简为

$$m|\sin n\alpha|+m|\sin m\alpha|+\frac{|\sin mn\alpha|}{|\sin m\alpha|}+\frac{|\sin mn\alpha|}{|\sin n\alpha|}>1.$$

事实上，我们证明

$$\max\left\{m|\sin n\alpha|,\frac{|\sin mn\alpha|}{|\sin n\alpha|}\right\}\geq 1. \qquad ①$$

记 $x=n\alpha$. 存在整数 k，使得 $k\pi\leq x<(k+1)\pi$，记

$$x_0=\min\{x-k\pi,\ (k+1)\pi-x\},$$

则 $0\leq x_0\leq\dfrac{\pi}{2}$. 易知

$$|\sin n\alpha|=\sin x_0, \qquad ②$$

$$|\sin mn\alpha|=|\sin mx|=\left|\sin mx_0\right|. \qquad ③$$

由于 $\sin n\alpha\neq 0$，由②知 $x_0\neq 0$，故 $0<x_0\leq\dfrac{\pi}{2}$.

若 $0<x_0<\dfrac{\pi}{m+1}$，则 $0<x_0\leq mx_0<\pi-x_0<\pi$，故由②、③知

$$|\sin n\alpha|=\sin x_0<\sin mx_0=|\sin mn\alpha|,$$

即 $\dfrac{|\sin mn\alpha|}{|\sin n\alpha|}\geq 1$. ……10 分

若 $\dfrac{\pi}{m+1}\leq x_0\leq\dfrac{\pi}{2}$，则对 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，利用 $\sin x$ 的上凸性易知 $\sin x\geq\dfrac{2}{\pi}x$，故

$$m|\sin n\alpha|=m\sin x_0\geq m\sin\frac{\pi}{m+1}\geq m\cdot\frac{\pi}{m+1}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{2m}{m+1}\geq 1.$$

这就证明了①，从而原不等式得证. ……20 分