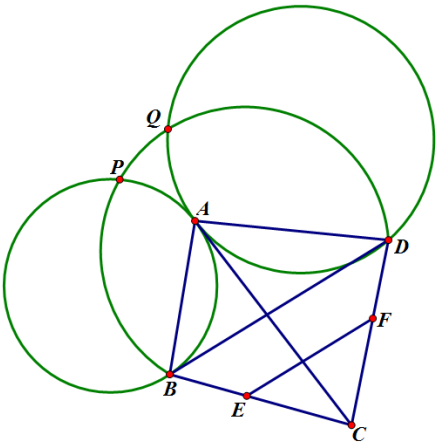
2024年全国中学生数学奥林匹克竞赛(预赛)
暨2024年全国高中数学联合竞赛
加试试题(A卷)

一．(本题满分40分) 给定正整数r, 求最大的实数C, 使得存在一个公比为r的实数等比数列$\{a_n\}_{n\geqslant 1}$, 满足$\|a_n\|\geqslant C$对所有正整数n成立.($\|x\|$表示实数x到与它最近整数的距离.)

二．(本题满分40分) 如图，在凸四边形$ABCD$中，AC平分$\angle BAD$, 点E,F分别在边BC,CD上，满足$EF\|\|BD$, 分别延长FA,EA至点P,Q, 使得过点A,B,P的圆ω_1及过点A,D,Q的圆w_2均与直线AC相切. 证明：B,P,Q,D四点共 圆. **(答题时储将图画在答卷纸上)**



三．(本题满分50分) 给定正整数n. 在一个$3\times n$的方格表上，由一些方格构成的集合S称为“连通的”，如果对S中任意两个不同的小方格A,B, 存在整数$l\geqslant 2$及S中l个方格$A=C_1,C_2,\ldots,C_l=B$, 满足C_i与C_{i+1}有公共边$(i=1,2,\cdots,l-1)$.

求具有下述性质的最大整数K: 若将该方格表的每个小方格任意染为黑色或白色，总存在一个连通的集合S, 使得S中的黑格个数与白格个数之差的绝对值 不小于K.

四.(本题满分50分) 设A,B为正整数，S是一些正整数构成的一个集合，具有下述性质：

(1) 对任意非负整数k, 有$A^K\in S$;

(2) 若正整数$n\in S$, 则n的每个正约数均属于S;

(3) 若$m,n\in S$, 且m,n互素，则$mn\in S$;

(4) 若$n\in S$, 则$An+B\in S$.

证明：与B互素的所有正整数均属于S.