2024 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）
暨 2024 年全国高中数学联合竞赛
加试（A 卷）参考答案及评分标准

说明：

1．评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分．

2．如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不得增加其他中间档次．

一．（本题满分 40 分）给定正整数 r．求最大的实数 C，使得存在一个公比为 r 的实数等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$，满足 $\|a_n\|\geq C$ 对所有正整数 n 成立．（$\|x\|$ 表示实数 x 到与它最近整数的距离．）

解：情形 1：r 为奇数．

对任意实数 x，显然有 $\|x\|\leq\frac{1}{2}$，故满足要求的 C 不超过 $\frac{1}{2}$．

又取 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=\frac{1}{2}$，注意到对任意正整数 n，均有 r^{n-1} 为奇数，因此 $\|a_n\|=\left\|\frac{r^{n-1}}{2}\right\|=\frac{1}{2}$．这意味着 $C=\frac{1}{2}$ 满足要求．从而满足要求的 C 的最大值为 $\frac{1}{2}$．

……10 分

情形 2：r 为偶数．

设 $r=2m\,(m\in\mathbf{N}^*)$．对任意实数 α，我们证明 $\|a_1\|$ 与 $\|a_2\|$ 中必有一数不超过 $\frac{m}{2m+1}$，从而 $C\leq\frac{m}{2m+1}$．

事实上，设 $a_1=k\pm\delta$，其中 k 是与 a_1 最近的整数（之一），且 $0\leq\delta\leq\frac{1}{2}$．

注意到，对任意实数 x 及任意整数 k，均有 $\|x+k\|=\|x\|$，以及 $\|-x\|=\|x\|$．

若 $0\leq\delta\leq\frac{m}{2m+1}$，则 $\|a_1\|=\|k\pm\delta\|=\delta\leq\frac{m}{2m+1}$．

若 $\frac{m}{2m+1}<\delta\leq\frac{1}{2}$，则 $\frac{2m^2}{2m+1}<2m\delta\leq m$，即 $m-\frac{m}{2m+1}<\delta r\leq m$，此时

$$\|a_2\|=\|a_1 r\|=\|kr\pm\delta r\|=\|\delta r\|<\frac{m}{2m+1}.$$

……30 分

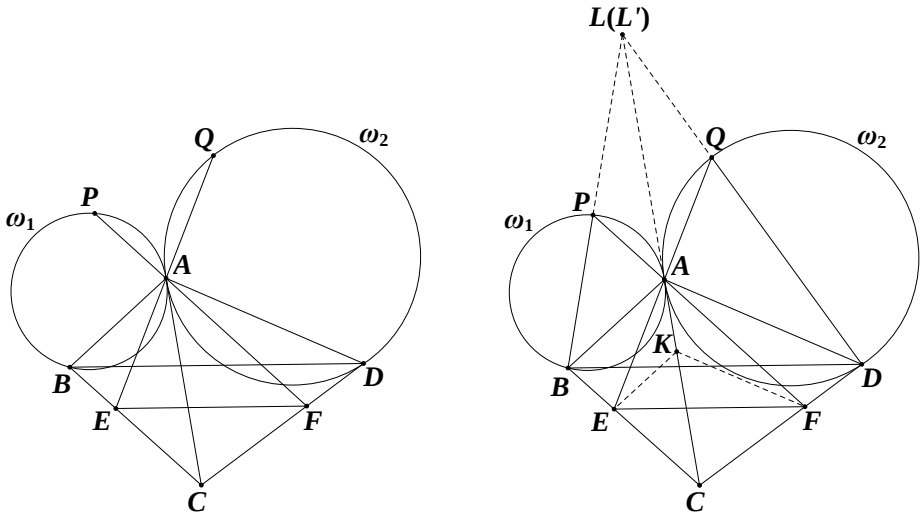
另一方面，取 $a_1=\frac{m}{2m+1}$，则对任意正整数 n，有 $a_n=\frac{m}{2m+1}(2m)^{n-1}$，由二项式展开可知 $a_n=\frac{m}{2m+1}(2m+1-1)^{n-1}=K+(-1)^{n-1}\frac{m}{2m+1}$，其中 K 为整数，故 $\|a_n\|=\frac{m}{2m+1}$．这意味着 $C=\frac{m}{2m+1}$ 满足要求．

从而满足要求的 C 的最大值为 $\frac{m}{2m+1}=\frac{r}{2(r+1)}$．

综上，当 r 为奇数时，所求 C 的最大值为 $\frac{1}{2}$；当 r 为偶数时，所求 C 的最大值为 $\frac{r}{2(r+1)}$. ……40 分

二．（本题满分 40 分）如图，在凸四边形 $ABCD$ 中，AC 平分 $\angle BAD$，点 E, F 分别在边 BC, CD 上，满足 $EF \parallel BD$．分别延长 FA, EA 至点 P, Q，使得过点 A, B, P 的圆 ω_1 及过点 A, D, Q 的圆 ω_2 均与直线 AC 相切．证明：B, P, Q, D 四点共圆．

（答题时请将图画在答卷纸上）



证明：由圆 ω_1 与 AC 相切知 $\angle BPA = \angle BAC = \angle CAD > \angle CAF = 180^\circ - \angle PAC$，故 BP, CA 的延长线相交，记交点为 L.

由 $EF \parallel BD$ 知 $\frac{CE}{CB} = \frac{CF}{CD}$．在线段 AC 上取点 K，使得 $\frac{CK}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{CF}{CD}$，则 $KE \parallel AB,\ KF \parallel AD$. ……10 分

由 $\angle ABL = \angle PAL = \angle KAF$，$\angle BAL = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \angle CAD = \angle AKF$，可知 $\Delta ABL \backsim \Delta KAF$，所以 $AL = \frac{KF \cdot AB}{KA}$. ……20 分

同理，记 DQ, CA 的延长线交于点 L'，则 $AL' = \frac{KE \cdot AD}{KA}$.

又由 $KE \parallel AB,\ KF \parallel AD$ 知 $\frac{KE}{AB} = \frac{CK}{CA} = \frac{KF}{AD}$，即 $KE \cdot AD = KF \cdot AB$.

所以 $AL' = AL$，即 L' 与 L 重合.

由切割线定理知 $LP \cdot LB = LA^2 = LQ \cdot LD$，所以 B, P, Q, D 四点共圆.

……40 分

三．（本题满分 50 分）给定正整数 n. 在一个 $3 \times n$ 的方格表上，由一些方格构成的集合 S 称为“连通的”，如果对 S 中任意两个不同的小方格 A, B，存在整数 $l \geq 2$ 及 S 中 l 个方格 $A = C_1, C_2, \cdots, C_l = B$，满足 C_i 与 C_{i+1} 有公共边

$(i=1,2,\cdots,l-1)$.

求具有下述性质的最大整数 K：若将该方格表的每个小方格任意染为黑色或白色，总存在一个连通的集合 S，使得 S 中的黑格个数与白格个数之差的绝对值不小于 K.

解： 所求最大的 $K=n$.

对一个由小方格构成的集合 S，记 S_b 是 S 中的黑格个数，S_w 是 S 中的白格个数. 用 $[i,j]$ 表示第 i 行第 j 列处的方格，这里 $1\le i\le 3$，$1\le j\le n$. 对于两个方格 $A=[i,j]$，$B=[i',j']$，定义它们之间的距离为 $d(A,B)=|i-i'|+|j-j'|$.

首先，如果将方格表按国际象棋棋盘一样黑白间隔染色，我们证明对任意连通的集合 S，均有 $|S_b-S_w|\le n$，这表明 $K\le n$.

设 $[1,1]$ 是黑格，并记 $\varepsilon\in\{0,1\}$，满足 $\varepsilon\equiv n\pmod 2$.

先证 $S_b-S_w\le n$. 可不妨设 S 包含所有黑格，这是因为若 S 不包含所有黑格，取不属于 S 的黑格 A 满足 $d(A,S)$ 最小，这里 $d(A,S)=\min\limits_{B\in S}d(A,B)$. 易知 $d(A,S)=1$ 或 2. 若 $d(A,S)=1$，取 $S'=S\cup\{A\}$，则 S' 仍是连通的，且 $S'_b-S'_w$ 更大. 若 $d(A,S)=2$，则存在与 A 相邻的白格 C，而 C 与 S 中某个方格 B 相邻，取 $S'=S\cup\{A,B\}$，则 S' 仍是连通的，且 $S'_b-S'_w$ 不变. 因而可逐步扩充 S，使得 S 包含所有黑格，保持 S 的连通性，且 S_b-S_w 不减.

考虑白格集合 $W_k=\{[i,j]\,|\,i+j=k\}$，$k=3,5,\cdots,n+1+\varepsilon$，每个 W_k 中至少有一个方格属于 S，否则不存在从黑格 $A=[1,1]\in S$ 到黑格 $B=[3,n-1+\varepsilon]$ 的 S 中路径. 故 $S_w\ge\frac{1}{2}(n+\varepsilon)$，而 $S_b=\frac{1}{2}(3n+\varepsilon)$，故 $S_b-S_w\le n$. ……10 分

类似可证 $S_w-S_b\le n$. 同上，可不妨设 S 包含所有白格，从而 $S_w=\frac{1}{2}(3n-\varepsilon)$. 再考虑黑格集合 $B_k=\{[i,j]\,|\,i+j=k\}$，$k=4,6,\cdots,n+2-\varepsilon$，每个 B_k 中至少有一个黑格属于 S，否则不存在从白格 $A=[1,2]$ 到白格 $B=[3,n-\varepsilon]$ 的 S 中路径. 从而 $S_b\ge\frac{1}{2}(n-\varepsilon)$，故 $S_w-S_b\le n$. ……20 分

下面证明 $K=n$ 具有题述性质，即对任意的染色方案，总存在连通的集合 S，使得 $|S_b-S_w|\ge n$.

设表格中共有 X 个黑格和 Y 个白格，在第二行中有 x 个黑格和 y 个白格. 于是 $X+Y=3n$，$x+y=n$. 故

$$(X-y)+(Y-x)=(X+Y)-(x+y)=2n.$$

由平均值原理可知 $\max\{X-y,Y-x\}\ge n$.

不妨设 $X-y\ge n$. 取 S 为第二行中的 y 个白格以及所有 X 个黑格. 由于 S 包含第二行中所有方格，因而 S 是连通的. 而 $S_b=X$，$S_w=y$，$S_b-S_w=X-y\ge n$.

综上所述，$K_{\max}=n$. ……50 分

四.（本题满分 50 分） 设 A,B 为正整数，S 是一些正整数构成的一个集合，具有下述性质：

(1) 对任意非负整数 k，有 $A^k\in S$；

(2) 若正整数 $n\in S$，则 n 的每个正约数均属于 S；

(3) 若 $m, n \in S$，且 m, n 互素，则 $mn \in S$；

(4) 若 $n \in S$，则 $An + B \in S$.

证明：与 B 互素的所有正整数均属于 S.

证明：先证明下述引理.

引理：若 $n \in S$，则 $n + B \in S$.

引理的证明：对 $n \in S$，设 n_1 是 n 的与 A 互素的最大约数，并设 $n = n_1 n_2$，则 n_2 的素因子均整除 A，从而 $(n_1, n_2) = 1$. 由条件(1)及(2)知，对任意素数 $p \mid A$ 及任意正整数 k，有 $p^k \in S$. 因此，将 $A^{k-1} n_1$ 作标准分解，并利用(3)知 $A^{k-1} n_1 \in S$. 又 $n_2 \mid n$，而 $n \in S$，故由(2)知 $n_2 \in S$. 因 $(A^{k-1} n_1, n_2) = 1$，故由(3)知 $A^{k-1} n_1 \cdot n_2 \in S$，即 $A^{k-1} n \in S$. 再由(4)知

$$A^k n + B \in S \text{（对任意正整数 } k \text{）.} \qquad ①$$

……10 分

设 $n + B = C \cdot D$，这里正整数 C 的所有素因子均整除 A，正整数 D 与 A 互素，从而 $(C, D) = 1$. 由(1)及(2)知 $C \in S$（见上面 $A^{k-1} n \in S$ 的证明）.

另一方面，因 $(D, A) = 1$，故由欧拉定理知 $D \mid A^{\varphi(D)} - 1$. 因此

$$A^{\varphi(D)} n + B = (A^{\varphi(D)} - 1) n + (n + B) \equiv 0 \pmod{D},$$

但由①知 $A^{\varphi(D)} n + B \in S$，故由(2)知 $D \in S$. 结合 $C \in S$ 及 $(C, D) = 1$ 知 $CD \in S$，即 $n + B \in S$. 引理证毕.

……40 分

回到原问题. 由(1)，取 $k = 0$ 知 $1 \in S$，故反复用引理知对任意正整数 y，有 $1 + By \in S$.

对任意 $n \in \mathbf{N}^*, (n, B) = 1$，存在正整数 x, y 使得 $nx = 1 + By$，因此 $nx \in S$，因 $n \mid nx$，故 $n \in S$. 证毕.

……50 分