2024年全国中学生数学奥林匹克竞赛(预赛)
暨2024年全国高中数学联合竞赛
一试试题(A)

一、填空题:本大题共8小题,每小题8分,满分64分.

1. 若实数$m>1$满足$\log_9(\log_8 m)=2024$,则$\log_3(\log_2 m)$的值为_____.

2. 设无穷等比数列$\{a_n\}$的公比q满足$0<|q|<1$.若$\{a_n\}$的各项和等于$\{a_n\}$各项的平方和,则a_2的取值范围是_____.

3. 设实数a,b满足:集合$A=\{x\in R|x^2-10x+a\leqslant 0\}$与$B=\{x\in R|bx\leqslant b^3\}$的交集为$[4,9]$,则$a+b$的值为_____.

4. 在三棱锥$P-ABC$中,若$PA\perp$底面ABC,且棱AB,BP,BC,CP的长分别为$1,2,3,4$,则该三棱锥的体积为_____.

5. 一个不均匀的骰子,掷出$1,2,3,4,5,6$点的概率依次成等差数列.独立地先后掷该骰子两次,所得的点数分别记为a,b.若事件$a+b=7$发生的概率为$\frac{1}{7}$,则事件"$a=b$"发生的概率为_____.

6. 设$f(x)$是定义域为R、最小正周期为5的函数.若函数$g(x)=f(2^x)$在区间$[0,5)$上的零点个数为25,则$g(x)$在区间$[1,4)$上的零点个数为_____.

7. 设F_1,F_2为椭圆Ω的焦点,在Ω上取一点P(异于长轴端点),记O为$\triangle PF_1F_2$的外心,若$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$,则$\Omega$的离心率的最小值为_____.

8. 若三个正整数a,b,c的位数之和为8,且组成a,b,c的8个数码能排列为$2,0,2,4,0,9,0,8$,则称(a,b,c)为"幸运数组",例如$(9,8,202400)$是一个幸运数组.满足$10<a<b<c$的幸运数组(a,b,c)的个数为_____.

二、解答题:本大题共3小题,满分56分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9. (本题满分16分)在ΔABC中,已知$\cos C=\frac{sinA+cosA}{2}=\frac{\sin B+cosB}{2}$,求$\cos C$的值.

10. (本题满分20分)在平面直角坐标系中,双曲线$\Gamma:x^2-y^2=1$的右顶点为A.将圆心在y轴上,且与Γ的两支各恰有一个公共点的圆称为"好圆".若两个好圆外切于点P,圆心距为d,求$\frac{d}{|PA|}$的所有可能的值.

11. (本题满分20分)设复数z,w满足$z+w=2$,求$S=|z^2-2w|+|w^2-2z|$的最小可能值.