2024 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）
暨 2024 年全国高中数学联合竞赛
一试（A 卷）参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不得增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，不得增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 若实数 $m>1$ 满足 $\log_9(\log_8 m)=2024$，则 $\log_3(\log_2 m)$ 的值为_____.

答案： 4049 .

解： $\log_3(\log_2 m)=\log_3(3\log_8 m)=1+2\log_9(\log_8 m)=1+2\times 2024=4049$.

2. 设无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 q 满足 $0<|q|<1$. 若 $\{a_n\}$ 的各项和等于 $\{a_n\}$ 各项的平方和，则 a_2 的取值范围是_____.

答案： $\left[-\dfrac{1}{4},0\right)\cup(0,2)$.

解： 因为数列 $\{a_n\}$ 的各项和为 $\dfrac{a_1}{1-q}$，注意到 $\{a_n\}$ 各项的平方依次构成首项为 a_1^2、公比为 q^2 的等比数列，于是 $\{a_n^2\}$ 的各项和为 $\dfrac{a_1^2}{1-q^2}$.

由条件知 $\dfrac{a_1}{1-q}=\dfrac{a_1^2}{1-q^2}$，化简得 $a_1=1+q$.

当 $q\in(-1,0)\cup(0,1)$ 时，$a_2=(1+q)q=\left(q+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\in\left[-\dfrac{1}{4},0\right)\cup(0,2)$.

3. 设实数 a,b 满足：集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-10x+a\le 0\}$ 与 $B=\{x\in\mathbf{R}\mid bx\le b^3\}$ 的交集为 $[4,9]$，则 $a+b$ 的值为_____.

答案： 7 .

解： 由于 $x^2-10x+a\le\Leftrightarrow(x-5)^2\le 25-a$，故 A 是一个包含 $[4,9]$ 且以 $x=5$ 为中点的闭区间，而 B 是至多有一个端点的区间，所以必有 $A=[1,9]$，故 $a=9$.

进一步可知 B 只能为 $[4,+\infty)$，故 $b<0$ 且 $4b=b^3$，得 $b=-2$.

于是 $a+b=7$.

4. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，若 $PA\perp$ 底面 ABC，且棱 AB, BP, BC, CP 的长分别为 1, 2, 3, 4，则该三棱锥的体积为_____.

答案： $\dfrac{3}{4}$.

解： 由条件知 $PA\perp AB$，$PA\perp AC$.

因此 $PA=\sqrt{BP^2-AB^2}=\sqrt{3}$，进而 $AC=\sqrt{CP^2-PA^2}=\sqrt{13}$.

在 ΔABC 中，$\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\dfrac{1+9-13}{2\times1\times3}=-\dfrac{1}{2}$，故 $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

又该三棱锥的高为 PA，故其体积为 $V=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABC}\cdot PA=\dfrac{3}{4}$.

5. 一个不均匀的骰子，掷出 1, 2, 3, 4, 5, 6 点的概率依次成等差数列．独立地先后掷该骰子两次，所得的点数分别记为 a,b．若事件“$a+b=7$”发生的概率为 $\dfrac{1}{7}$，则事件“$a=b$”发生的概率为_____.

答案： $\dfrac{4}{21}$.

解： 设掷出 $1, 2, \cdots, 6$ 点的概率分别为 $p_1, p_2, \cdots, p_6$．由于 $p_1, p_2, \cdots, p_6$ 成等差数列，且 $p_1+p_2+\cdots+p_6=1$，故 $p_1+p_6=p_2+p_5=p_3+p_4=\dfrac{1}{3}$.

事件“$a+b=7$”发生的概率为 $P_1=p_1p_6+p_2p_5+\cdots+p_6p_1$.

事件“$a=b$”发生的概率为 $P_2=p_1^2+p_2^2+\cdots+p_6^2$.

于是 $P_1+P_2=(p_1+p_6)^2+(p_2+p_5)^2+(p_3+p_4)^2=3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{3}$.

由于 $P_1=\dfrac{1}{7}$，所以 $P_2=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{7}=\dfrac{4}{21}$.

6. 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$、最小正周期为 5 的函数．若函数 $g(x)=f(2^x)$ 在区间 $[0,5)$ 上的零点个数为 25，则 $g(x)$ 在区间 $[1,4)$ 上的零点个数为_____.

答案： 11.

解： 记 $2^x=t$，则当 $x\in[0,5)$ 时，$t\in[1,32)$，且 t 随 x 增大而严格增大．因此，$g(x)$ 在 $[0,5)$ 上的零点个数等于 $f(t)$ 在 $[1,32)$ 上的零点个数．

注意到 $f(t)$ 有最小正周期 5，设 $f(t)$ 在一个最小正周期上有 m 个零点，则 $f(t)$ 在 $[2,32)$ 上有 $6m$ 个零点，又设 $f(t)$ 在 $[1,2)$ 上有 n 个零点，则 $6m+n=25$，且 $0\le n\le m$，因此 $m=4, n=1$.

从而 $g(x)$ 在 $[1,4)$ 上的零点个数等于 $f(t)$ 在 $[2,16)=[1,16)\setminus[1,2)$ 上的零点个数，即 $3m-n=11$.

7. 设 F_1, F_2 为椭圆 Ω 的焦点，在 Ω 上取一点 P（异于长轴端点），记 O 为 ΔPF_1F_2 的外心，若 $\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$，则 Ω 的离心率的最小值为_____.

答案： $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

解： 取 F_1F_2 的中点 M，有 $\overrightarrow{MO}\perp\overrightarrow{F_1F_2}$，故 $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=0$.

记 $|PF_1|=u, |PF_2|=v, |F_1F_2|=d$，则

$$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}+\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2})\cdot(\overrightarrow{PF_2}-\overrightarrow{PF_1})=\frac{v^2-u^2}{2},$$

$$2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=2uv\cdot\cos\angle F_1PF_2=u^2+v^2-d^2,$$

故由条件知$\frac{v^2-u^2}{2}=u^2+v^2-d^2$，即$d^2=\frac{3u^2+v^2}{2}$.

由柯西不等式知$\frac{8}{3}d^2=(3u^2+v^2)\left(\frac{1}{3}+1\right)\geq(u+v)^2$（当$v=3u$时等号成立）.

所以Ω的离心率$e=\frac{d}{u+v}\geq\sqrt{\frac{3}{8}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

当$u:v:d=1:3:\sqrt{6}$时，Ω的离心率e取到最小值$\frac{\sqrt{6}}{4}$.

8. 若三个正整数a, b, c的位数之和为8，且组成a, b, c的8个数码能排列为2, 0, 2, 4, 0, 9, 0, 8，则称(a, b, c)为“幸运数组”，例如$(9, 8, 202400)$是一个幸运数组．满足$10<a<b<c$的幸运数组(a, b, c)的个数为_____.

答案：591.

解：对于幸运数组(a, b, c)，当$10<a<b<c$时，分两类情形讨论.

情形 1：a是两位数，b, c是三位数.

暂不考虑b, c的大小关系，先在a, b, c的非最高位（五个位置）中选三个位置填0，剩下五个位置还未填，任选其中两个填2，最后三个位置填写4, 8, 9，这样的填法数为$C_5^3\times C_5^2\times 3!=600$．再考虑其中$b, c$的大小关系，由于不可能有$b=c$，因此$b<c$与$b>c$的填法各占一半，故有300个满足要求的幸运数组.

情形 2：a, b是两位数，c是四位数.

暂不考虑a, b的大小关系，类似于情形 1，先在a, b, c的非最高位（五个位置）中选三个位置填0，剩下五个位置填2, 2, 4, 8, 9，这样的填法数为600．再考虑其中a, b的大小关系．若$a=b$，则必有$a=b=20$，c的四个数字是0, 4, 8, 9的排列，且0不在首位，有$3\times 3!=18$种填法，除这些填法外，$a<b$与$a>b$的填法各占一半，故有$\frac{600-18}{2}=291$个满足要求的幸运数组.

综上，所求幸运数组的个数为$300+291=591$.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（本题满分 16 分）在ΔABC中，已知$\cos C=\frac{\sin A+\cos A}{2}=\frac{\sin B+\cos B}{2}$，求$\cos C$的值.

解：由条件知$\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(B+\frac{\pi}{4}\right)$. ……4 分

假如$\left(A+\frac{\pi}{4}\right)+\left(B+\frac{\pi}{4}\right)=\pi$，则$C=\frac{\pi}{2}$，$\cos C=0$，但$\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)>0$，矛盾.

所以只可能$A+\frac{\pi}{4}=B+\frac{\pi}{4}$．此时$A=B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$C=\pi-2A$.

……8 分

注意到$\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)>0$，故$C<\frac{\pi}{2}$，所以$A=B\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，结合条

件得

$$\cos C=-\cos 2A=-\sin\left(2A+\frac{\pi}{2}\right)=-2\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=-2\cdot\sqrt{2}\cos C\cdot\left(-\sqrt{1-(\sqrt{2}\cos C)^2}\right),$$

又$\cos C>0$，化简得$8(1-2\cos^2 C)=1$，解得$\cos C=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$. ……16 分

10.（本题满分 20 分）在平面直角坐标系中，双曲线$\Gamma: x^2-y^2=1$的右顶点为A．将圆心在y轴上，且与Γ的两支各恰有一个公共点的圆称为“好圆”．若两个好圆外切于点P，圆心距为d，求$\dfrac{d}{|PA|}$的所有可能的值.

解：考虑以$(0, y_0)$为圆心的好圆$\Omega_0: x^2+(y-y_0)^2=r_0^2\ (r_0>0)$.

由Ω_0与Γ的方程消去x，得关于y的二次方程

$$2y^2-2y_0y+y_0^2+1-r_0^2=0.$$

根据条件，该方程的判别式$\Delta=4y_0^2-8(y_0^2+1-r_0^2)=0$，因此$y_0^2=2r_0^2-2$.

……5 分

对于外切于点P的两个好圆Ω_1,Ω_2，显然P在y轴上．设$P(0,h)$，Ω_1,Ω_2的半径分别为r_1, r_2，不妨设Ω_1,Ω_2的圆心分别为$(0, h+r_1), (0, h-r_2)$，则有

$$(h+r_1)^2=2r_1^2-2,$$
$$(h-r_2)^2=2r_2^2-2.$$

两式相减得$2h(r_1+r_2)=r_1^2-r_2^2$，而$r_1+r_2>0$，故化简得$h=\dfrac{r_1-r_2}{2}$.

……10 分

进而$\left(\dfrac{r_1-r_2}{2}+r_1\right)^2=2r_1^2-2$，整理得

$$r_1^2-6r_1r_2+r_2^2+8=0.\qquad①$$

由于$d=r_1+r_2$，$A(1,0)$，$|PA|^2=h^2+1=\dfrac{(r_1-r_2)^2}{4}+1$，而①可等价地写为$2(r_1-r_2)^2+8=(r_1+r_2)^2$，即$8|PA|^2=d^2$，所以$\dfrac{d}{|PA|}=2\sqrt{2}$. ……20 分

11.（本题满分 20 分）设复数z, w满足$z+w=2$，求$S=|z^2-2w|+|w^2-2z|$的最小可能值.

解法 1：设$z=a+b\mathrm{i}\ (a,b\in\mathbf{R})$，则$w=2-a-b\mathrm{i}$，故

$$S=|a^2+2a-4-b^2+2b(a+1)\mathrm{i}|+|a^2-6a+4-b^2+2b(a-3)\mathrm{i}|,$$
$$\geq|a^2+2a-4-b^2|+|a^2-6a+4-b^2|$$
$$=|(a+1)^2-5-b^2|+|(a-3)^2-5-b^2|.\qquad①$$

……5 分

记$t=a+1$．对固定的b，记$B=5+b^2\geq 5$，求$f(t)=|t^2-B|+|(t-4)^2-B|$的最小值.

由 $f(t)=f(4-t)$，不妨设 $t\ge 2$．我们证明 $f(t)\ge f(t_0)$，其中 $t_0=\sqrt{B}$．

当 $t\in[2,t_0]$ 时，$t-4\in[-2,t_0-4]$，

$$\begin{aligned}f(t)-f(t_0)&=(B-t^2)+(B-(t-4)^2)-(B-(t_0-4)^2)\\&=t_0^2+(t_0-4)^2-(t^2+(t-4)^2)=(2t_0^2-8t_0)-(2t^2-8t)\\&\ge 0\ (\text{用到}2\le t\le t_0\ \text{及}\ y=2x^2-8x\ \text{在}[2,+\infty)\ \text{上单调增}).\end{aligned}$$

……10 分

当 $t\in[t_0,+\infty)$ 时，

$$\begin{aligned}f(t)-f(t_0)&=t^2-B+\left|(t-4)^2-B\right|-\left|(t_0-4)^2-B\right|\\&\ge t^2-t_0^2-\left|(t-4)^2-(t_0-4)^2\right|=(t-t_0)\left(t+t_0-\left|t+t_0-8\right|\right)\\&\ge 0\ (\text{用到}t+t_0\ge 4).\end{aligned}$$

……15 分

所以 $S\ge f(t_0)=B-(t_0-4)^2=8\sqrt{B}-16\ge 8\sqrt{5}-16$．

当 $b=0$（①取到等号），$a=t_0-1=\sqrt{5}-1$ 时，S 取到最小值 $8\sqrt{5}-16$．

……20 分

解法 2：设 $z=1+x+y\mathrm{i},\ w=1-x-y\mathrm{i}\ (x,y\in\mathbf{R})$，不妨设其中 $x\ge 0$．

计算得

$$z^2-2w=(x^2+4x-1-y^2)+(2x+4)y\mathrm{i},$$
$$w^2-2z=(x^2-4x-1-y^2)+(2x-4)y\mathrm{i}.$$

所以

$$S\ge\left|\mathrm{Re}(z^2-2w)\right|+\left|\mathrm{Re}(w^2-2z)\right|=\left|x^2+4x-1-y^2\right|+\left|x^2-4x-1-y^2\right|.$$

……5 分

利用 $|a|+|b|\ge|a\pm b|$，可得

$$S\ge 8x,\qquad①$$

亦有

$$S\ge 2\left|x^2-1-y^2\right|=2(1-x^2+y^2)\ge 2(1-x^2).\qquad②$$

……10 分

注意到方程 $8x=2(1-x^2)$ 的正根为 $\sqrt{5}-2$．

当 $x\ge\sqrt{5}-2$ 时，由①得 $S\ge 8x\ge 8\sqrt{5}-16$．

当 $0\le x<\sqrt{5}-2$ 时，由②得 $S\ge 2(1-x^2)>2(1-(\sqrt{5}-2)^2)=8\sqrt{5}-16$．

因此当 $x=\sqrt{5}-2,\ y=0$ 时，S 取到最小值 $8\sqrt{5}-16$．

……20 分

解法 3：因为 $w=2-z$，所以我们有

$$\left|z^2-2(2-z)\right|=\left|z^2+2z-4\right|=\left|z+1+\sqrt{5}\right|\cdot\left|z+1-\sqrt{5}\right|;$$
$$\left|(2-z)^2-2z\right|=\left|z^2-6z+4\right|=\left|z-1+\sqrt{5}\right|\cdot\left|z-1-\sqrt{5}\right|.$$

从而上两式最右边各项分别是 z 到复平面中实轴上的点 $-1-\sqrt{5}$，$-1+\sqrt{5}$，$3-\sqrt{5}$，$3+\sqrt{5}$ 的距离，所以把 $z=x+\mathrm{i}y$ 换成其实部 x 时，都不会增大. 因此只需考虑函数 $f(x)=\left|x^2+2x-4\right|+\left|x^2-6x+4\right|$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值.

……10 分

因为 $-1-\sqrt{5}<3-\sqrt{5}<-1+\sqrt{5}<3+\sqrt{5}$，因此我们有以下几种情况：

1. 若 $x \le -1-\sqrt{5}$，则 $f(x)=2x^2-4x$，在这一区间上的最小值为 $f(-1-\sqrt{5})=16+8\sqrt{5}$；

2. 若 $x \in \left(-1-\sqrt{5}, 3-\sqrt{5}\right]$，则 $f(x)=-8x+8$，在这一区间上的最小值为 $f(3-\sqrt{5})=-16+8\sqrt{5}$；

……15 分

3. 若 $x \in \left[3-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5}\right]$，则 $f(x)=-2x^2+4x$，在这一区间上的最小值为 $f\left(3-\sqrt{5}\right)=f\left(-1+\sqrt{5}\right)=-16+8\sqrt{5}$；

4. 若 $x \in \left[-1+\sqrt{5}, 3+\sqrt{5}\right]$，则 $f(x)=8x-8$，在这一区间上的最小值为 $f\left(-1+\sqrt{5}\right)=-16+8\sqrt{5}$；

5. 若 $x \ge 3+\sqrt{5}$，则 $f(x)=2x^2-4x$，在这一区间上的最小值为 $f\left(3+\sqrt{5}\right)=16+8\sqrt{5}$.

综上所述，所求最小值为 $f\left(3-\sqrt{5}\right)=f\left(-1+\sqrt{5}\right)=8\sqrt{5}-16$.

……20 分